2014年杭州市第二次高考科目教学质量检测

数学（理科）试卷参考答案及评分标准

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	C	C	C	C	B	B	D	B

二、填空题：本大题共7小题，每小题4分，共28分．

11．$-1-i$　　12．$\dfrac{28}{3}$　　13．0　　14．48

15．$-\dfrac{1}{4}$　　16．$[-2,\ \dfrac{1}{4})$　　17．0

三、解答题：本大题共5小题， 共72分．解答应写出文字说明， 证明过程或演算步骤．

18．（本题满分14分）（Ⅰ）设等差数列的公差为d，等比数列的公比为q，

则$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=1+d$，$a_4=2q$，$a_5=1+2d$，

所以

$$4+d=2q，(1+d)+(1+2d)=2+2q，$$

解得 $d=2$，$q=3$．

所以

$$a_n=\begin{cases} n, & (n=2k-1) \\ 2\cdot 3^{\frac{n}{2}-1}, & (n=2k) \end{cases}，k\in\mathbf{N}^*．$$ ……………………………………………7分

（Ⅱ）当$n=1$时，$S_{2n}=2^n+n^2$；

当$n\geqslant 2$时，

因为 $S_{2n}=\dfrac{(1+2n-1)n}{2}+\dfrac{2(1-3^n)}{1-3}=n^2-1+3^n=n^2-1+(1+2)^n$

$>n^2-1+2^n+1=n^2+2^n$． ……………………………………………7分

19．（本题满分14分）（Ⅰ）设事件A为“两球上的标号都是奇数或都是偶数”，所以

$$P(A)=\frac{C_3^1C_2^1+C_2^1C_1^1}{C_5^1C_4^1}=\frac{2}{5}；$$ ……………………………5分

（Ⅱ）由得意得

$$X=1，2，3．$$

则

$$P(X=1)=\frac{C_3^1}{C_5^1}=\frac{3}{5}；\ P(X=2)=\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^1C_4^1}=\frac{3}{10}；\ P(X=3)=\frac{C_2^1C_1^1C_3^1}{C_5^1C_4^1C_3^1}=\frac{1}{10}．$$

所以X的分布列为

X	1	2	3
P	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

所以

$$E(X)=1\times\frac{3}{5}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{10}=\frac{3}{2}.$$ ………………9 分

20．（本题满分 15 分）

解：（Ⅰ）取 AC 的中点 F，连接 DF，$A'F$，

则 $DF//AB$，$A'E//AB$，

所以 $DF//A'E$，

又因为 $DF=\frac{1}{2}AB$，$A'E=\frac{1}{2}AB$，

所以 $DF=A'E$，

所以四边形 $DFA'E$ 是平行四边形，

所以 $ED//A'F$，又 $A'F\subset$平面 $ACC'A'$，

所以 $ED//$平面 $ACC'A'$； ……………………………………………………5 分

（Ⅱ）在平面 ABC 中，以过点 A 且垂直于 AC 的直线为 x 轴，以直线 AC 为 y 轴，AA'为 z 轴，建立空间直角坐标系 $A-xyz$．

所以点 $A(0,0,0)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(0,2,0)$，$B'(\sqrt{3},-1,2)$，$C'(0,2,2)$，$D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right)$．

所以

$$\overrightarrow{AD}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2},0\right),\ \overrightarrow{AB'}=\left(\sqrt{3},-1,2\right),\ \overrightarrow{AC'}=\left(0,2,2\right).$$

设平面 $B'AD$ 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则由 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AD}=0$ 和 $\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{AB'}=0$，得

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=0,\\ \sqrt{3}x-y+2z=0.\end{cases}\quad 取\ \boldsymbol{m}=(1,-\sqrt{3},-\sqrt{3}).$$

同理，可取平面 $C'AD$ 的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$．

设二面角 $B'-AD-C'$等于 θ，则

$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{7}.$$ ……………………………………10 分

21．（本题满分 15 分）（Ⅰ）$\frac{x^2}{4}+y^2=1$； ……………………………………4 分

（Ⅱ）设直线 BC 的方程为 $x=ty+1$（$t\in\mathbf{R}$），点 B，C 的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，把直线 BC 的方程代入椭圆方程，得

$$(t^2+4)y^2+2ty-3=0.$$

所以

$$y_1+y_2=\frac{-2t}{t^2+4},\quad y_1\cdot y_2=\frac{-3}{t^2+4}.$$

所以

$$x_1x_2=(ty_1+1)(ty_2+1)=t^2y_1y_2+t(y_1+y_2)+1=\frac{4-4t^2}{t^2+4},$$

$$x_1+x_2=(ty_1+1)+(ty_2+1)=t(y_1+y_2)+2=\frac{8}{t^2+4}.$$

因为直线 AB 的斜率 $k_{AB}=\frac{y_1}{x_1+2}$，所以直线 AB 的方程为

$$y=\frac{y_1}{x_1+2}(x+2).$$

所以点 M 的坐标为 $(3,\frac{5y_1}{x_1+2})$，同理，$N(3,\frac{5y_2}{x_2+2})$.

故以 MN 为直径的圆方程为:

$$(x-3)(x-3)+\left(y-\frac{5y_1}{x_1+2}\right)\left(y-\frac{5y_2}{x_2+2}\right)=0,$$

即

$$(x-3)^2+y^2-\left(\frac{5y_1}{x_1+2}+\frac{5y_2}{x_2+2}\right)y+\frac{25y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=0.$$

又因为

$$\frac{25y_1y_2}{(x_1+2)(x_2+2)}=\frac{25y_1y_2}{x_1x_2+2(x_1+x_2)+4}=\frac{25y_1y_2}{t^2y_1y_2+3t(y_1+y_2)+9}$$

$$=-\frac{25}{12}.$$

$$\frac{5y_1}{x_1+2}+\frac{5y_2}{x_2+2}=\frac{5y_1(x_2+2)+5y_2(x_1+2)}{(x_1+2)(x_2+2)}=5\frac{3(y_1+y_2)+2ty_1y_2}{t^2y_1y_2+3t(y_1+y_2)+9},$$

$$=-\frac{5t}{3}.$$

故以 MN 为直径的圆方程为

$$(x-3)^2+y^2+\frac{5t}{3}y-\frac{25}{12}=0.$$

令 $y=0$，即得

定点坐标为 $(3-\frac{5\sqrt{3}}{6},0)$ 或 $(3+\frac{5\sqrt{3}}{6},0)$. ……………………………………11 分

22.（本题满分 14 分）

（Ⅰ）函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x\mid x>-1\}$，

$$f'(x)=e^x-\frac{1}{x+1}.$$

当 $-1<x<0$ 时，因为 $\frac{1}{x+1}>1>e^x$，所以 $e^x-\frac{1}{x+1}<0$，即 $f'(x)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减.

当 $x>0$ 时，$e^x>1>\dfrac{1}{x+1}$，所以 $e^x-\dfrac{1}{x+1}>0$，即 $f'(x)>0$，

所以 $f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增.

故当 $x=0$ 时，$f(x)$取得最小值 1. ……………………………………………4 分

（Ⅱ）由（Ⅰ）知，当 $x\geqslant 0$ 时，$e^x-\ln(x+1)\geqslant 1$.

又因为 $0\leqslant x_1<x_2$，所以 $x_2-x_1>0$，

所以 $e^{x_2-x_1}-\ln(x_2-x_1+1)\geqslant 1$，

所以

$$e^{x_2-x_1}\geqslant 1+\ln(x_2-x_1+1). \qquad ①$$

又 $\ln(x_2-x_1+1)-\ln\dfrac{x_2+1}{x_1+1}=\ln\dfrac{(x_2-x_1+1)(x_1+1)}{x_2+1}$

$$=\ln[\frac{x_1(x_2-x_1)}{x_2+1}+1]>\ln 1=0.$$

所以

$$\ln(x_2-x_1+1)>\ln\frac{x_2+1}{x_1+1}. \qquad ②$$

综合①、②得 $e^{x_2-x_1}>1+\ln\dfrac{x_2+1}{x_1+1}=\ln\dfrac{e(x_2+1)}{x_1+1}$ 成立. ……………………5 分

（III）因为 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x+1}+\ln(1+\dfrac{1}{x})$.

令 $x=2^n$，故 $g(2^n)=\dfrac{\ln 2^n}{2^n+1}+\ln(1+\dfrac{1}{2^n})$，（$n\in N^*$）.

要使 $g(2^n)<a$，只要 $\dfrac{\ln 2^n}{2^n+1}<\dfrac{a}{2}$ 且 $\ln(1+\dfrac{1}{2^n})<\dfrac{a}{2}$ 即可.

由 $\ln(1+\dfrac{1}{2^n})<\dfrac{a}{2}$，解得 $n>-\log_2(e^{\frac{a}{2}}-1)$.

又当 $n>1$ 时，$\dfrac{\ln 2^n}{2^n+1}=\dfrac{n\ln 2}{(1+1)^n+1}<\dfrac{2n\ln 2}{n(n-1)}=\dfrac{2\ln 2}{n-1}$，

故只需 $\dfrac{2\ln 2}{n-1}<\dfrac{a}{2}$，即 $n>\dfrac{4\ln 2}{a}+1$.

设 $n_0=\max\{2,-\log_2(e^{\frac{a}{2}}-1),\dfrac{4\ln 2}{a}+1\}$，

只需取 $m(a)=2^{n_0+1}$ 时，$g[m(a)]<a$. ………………………………5 分

注：这样的 $m(a)$不唯一.